# הגדרה

תהי f מוגדרת על . נגיד שf רציפה ב אם היא רציפה בכל נקודה .

אם f מוגדרת בקטע נגיד שf רציפה ב אם היא רציפה ב ובנוסף לכך

# משפט

תהי f פונקציה רציפה המוגדרת על כך ש. אזי קיים כך ש

## הערה

המשפט אינו נכון אם מדובר בפונקציות על

### דוגמה

על , אבל לא קיימת נקודה כך ש

## הוכחה

אפשר להניח ש(אחרת התבונן ב, שגם היא רציפה). תהי  
. אזי שכן , וברור ש חסומה מלעיל(ע"י b). לכן קיים . אזי (כי ) ו שכן b הינו חסם מלעיל לE.

לכל קיימת כך ש(אחרת היה חסם עליון). במילים אחרות הקטע לכל *.*

*עכשיו נוכיח ש. נניח ש. אזי שכן . וקיים כך ש עבור . לכן c אינו חסם מלעיל ל בניגוד להגדרה.*

*נניח איפא ש. אזי שכן וקיים כך ש לכל ז"א קיים כך ש בניגוד ל למה שראינו.*

*לכן*

# משפט ערך הביניים

תהי f פונקציה רציפה ב ונניח ש. יהי . אזי קיים כך ש.

## הוכחה

יישם את המשפט הקודם בפונקציה

# שאלה

נניח שלפונקציה f המוגדרת על יש התכונה: אם ו אזי קיים  *כך ש. האם f חייבת להיות רציפה ב?*

*התשובה: לא!*

## דוגמה

בקטע

# דוגמה ליישום משפט ערך הביניים: משפט

יהי באשר וn אי זוגי. אזי קיים כך ש

## הערה

המשפט הזה אינו נכון במקרה שn זוגי, למשל ל אין שורשים ממשיים.

## דוגמה

, ו אם

## הוכחה

אפשר להניח ש. . קיים x כך שעבור מתקיים עבור , לכן , ולכן ע"פ מע"ה יש כך ש

# משפט

תהי f רציפה ב, אזי f חסומה ב

## הוכחה

טענה: קיים M כך ש לכל . נניח שלא. אזי לכל קיים כך ש. נתבונן ץבסדרה . יש תת סדרה שמתכנסת - . כיוון ש לכל k . בפרט רציפה ב ולכן גם רציפה ב. לכן ואז בסתירה להנחה.

## הערה

שימו לב לכך שהמשפט אינו נכון אם הקטע אינו סגור או אינו חסום. דוגמה: רציפה ב אבל אינה חסומה.

# משפט

תהי f רציפה ב. אזי קיימות נקודות כך ש, , ,

### הערה

המשפט אינו נכון אם הקטע אינו סגור או אינו חסום.

### דוגמה

על לא מקבלת מקסימום או מינימום.

### תרגיל

מצא פונקציה חסומה ורציפה על שלא מקבלת מקסימום או מינימום.

## הוכחה

כיוון שf חסומה ב קיים . לכל קיים כך ש. נתבונן ב. לפי משפט בולצנו ווירשטראס יש תתש סדרה מתכנסת . ברור ש. אזי . לכן

רציפות במידה שווה

# הגדרה

f רציפה על אם לכל ולכל קיים כך שאם , אזי

# הגדרה

נגיד שf רציפה במידה שווה(במ"ש) על הקטע אם לכל קיים כך שאם ו אזי

# משפט

תהי f רציפה בקטע הסגור . אזי f רציפה במ"ש שם.

## הוכחה

דרך שלילה – נניח שלא. אזי קיים כך שלכל קיימות כך ש אבל . נתבנון בסדרה . יש לה תת סדרה מתכנסת . f רציפה ב, לכן קיים כך שאם אזי .

קיים K כך שאם אזי וגם ואז אם :

*סתירה!*